

Nachhilfestunde Ga3

$$f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{t}{2}x^2$$

*Zur Untersuchung einer
gangrationalen Funktionenschar
mit Zusatzaufgaben*

**Niveau: Grundkurs Gymnasium
oder Fachoberschule**

KEIN ANFÄNGERTEXT

Datei Nr. 42203

Stand 13. März 2026

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

<https://mathe-cd.de>

VORWORT

In dieser dritten Nachhilfestunde zu ganzrationalen Funktionen geht es um eine Funktionenschar. Das sind Funktionen die denselben Bauplan und daher ganz ähnliche Eigenschaften aufweisen. Ich zeige dir in 15 Abschnitten, wie man einige der Grundaufgaben dazu löst.

Aufgabe

Gegeben sei die Funktion f_t für $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ durch $f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx^2$.

K_t sei das Schaubild der Funktion f_t .

- 1 Nullstellen von f_t .
- 2 Extrempunkte von K_t .
- 3 Wendepunkte von K_t .
- 4, 5 Skizziere die Kurven K_1 und $K_{0,5}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.
- 6, 7 Ortskurve C der Hochpunkte der Kurvenschar. (Ergebnis: $y = \frac{1}{36}x^3$)
- 8 Welche der Scharkurven K_t geht durch den Punkt $A(3 | 4)$?
- 9 Geht durch jeden Punkt der x-y-Ebene eine Kurve der Schar K_t ?
- 10, 11 Wo schneiden sich zwei beliebige Scharkurven?
- 12, 13 Die Gerade g: $y = -\frac{9}{2}x + \frac{81}{2}$ berührt eine der Scharkurven K_t an der Stelle $x = 9$.
Für welches t ist das möglich?
- 14, 15 Die Gerade g, die Wendetangente von K_1 und die x-Achse begrenzen ein Dreieck.
Berechne seinen Flächeninhalt.

Wir lösen nun diese Aufgabe gemeinsam in 15 Abschnitten.

1 Gegeben ist die Funktion f_t für $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ durch $f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx^2$.

Das Schaubild von f_t sei K_t .

Zu jedem t stellt diese Gleichung eine Funktion dar. Daher nennt man f_t auch eine **Funktionenschar**.

Kurvendiskussion für f_t

Wir bestimmen zuerst die **Nullstellen** von f_t bzw. die Schnittpunkte des Graphen K_t mit der x-Achse.

Da alle Punkte auf der x-Achse die y-Koordinate 0 haben, suchen wir also die Zahlen mit dem Funktionswert 0.

Bedingung für Nullstellen: $f_t(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx^2 = 0$

Da jeder Summand des Funktionsterms x enthält, kann man x ausklammern:

$$x^2 \left(-\frac{1}{18}x + \frac{1}{2}t \right) = 0$$

Diese Gleichung enthält links ein **Nullprodukt**.

Dazu muss man wissen, dass ein Produkt genau dann Null wird, wenn ein Faktor Null wird.

Es gibt in diesem Nullprodukt zwei Faktoren:

1. Faktor: $x^2 = 0$ Das führt zur doppelten Nullstelle $x_{N1} = 0$

2. Faktor: $\left(-\frac{1}{18}x + \frac{1}{2}t \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{18}x = \frac{1}{2}t$ bzw. $x_{N2} = 9t$

Ergebnis: f_t hat also die Nullstellen 0 und $9t$.

Oder so: K_t schneidet die x-Achse in $N_1(0 | 0)$ und $N_2(9t | 0)$.

Dabei ist N_1 (als doppelte Nullstelle) ein Berührungspunkt der x-Achse.

Nun eine erste Aufgabe für dich:

Berechne drei Ableitungen und daraus die Extrempunkte.

Meine Lösung zeige ich dir im Abschnitt $\Rightarrow$ 2

2 Gegeben ist

$$f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx^2$$

1. Ableitung: $f_t'(x) = -\frac{1}{6}x^2 + tx$

2. Ableitung: $f_t''(x) = -\frac{1}{3}x + t$

3. Ableitung: $f_t'''(x) = -\frac{1}{3}$

Mit der **notwendigen Bedingung** $f_t'(x_E) = 0$ sucht man nach Punkten mit waagrechter Tangente:

$$-\frac{1}{6}x^2 + tx = 0 \quad | \cdot 6$$

$$-x^2 + 6tx = 0$$

x ausklammern: $x(-x + 6t) = 0$ (Nullprodukt)

1. Faktor: $x_{E1} = 0$

2. Faktor: $(-x + 6t) = 0 \Rightarrow x_{E2} = 6t$

Dazu gehören diese y-Koordinaten:

$$f_t(0) = 0 \quad (\text{Das war die doppelte Nullstelle!}) \text{ und}$$

$$f_t(6t) = -\frac{1}{18} \cdot 6 \cdot 36 \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 36 t^2 = -12t^3 + 18t^3 = 6t^3$$

Mit der **hinreichenden Bedingung** untersucht man die Art des Extremwerts:

Überprüfung der hinreichenden Bedingung: (Beachte, dass $t > 0$ sein soll!)

$$f_t''(0) = t > 0 \quad \text{d. h. } N_1(0 | 0) \text{ ist ein Tiefpunkt.}$$

$$f_t''(6t) = -\frac{1}{3} \cdot 6t + t = -2t + t = -t \Rightarrow f_t''(6t) < 0 \quad \text{d. h. } H(6t | 6t^3) \text{ ist ein Hochpunkt.}$$

Nun bist du wieder dran.

Bestimme den Wendepunkt von K_t .

$$\Rightarrow \boxed{3}$$

3

Mit der **notwendigen Bedingung** $f_t''(x_W) = 0$ sucht man nach Wendepunkten:

$$-\frac{1}{3}x + t = 0 \Rightarrow x_W = 3t$$

GW

Mit der **hinreichenden Bedingung** bestätigt man, dass eine Wendestelle vorliegt:

$$f_t'''(3t) \neq 0$$

Wenn $f_t''(x_W) = 0$ und $f_t'''(x_W) \neq 0$ ist, dann liegt bei x_W ein Wendepunkt.

Wir brauchen noch die **y-Koordinate** des Wendepunkts:

$$f_t(3t) = -\frac{1}{18} \cdot 27t^3 + \frac{1}{2}t \cdot 9t^2 = -\frac{3}{2}t^3 + \frac{9}{2}t^3 = 3t^3$$

Ergebnis: K_t hat den Wendepunkt $W_t(3t | 3t^3)$

4

Nun wollen wir eine Skizze von zwei dieser Scharkurven bekommen.

Dazu stellt man die schon bekannten Ergebnisse zusammen:

	Allgemein	Für $t = 1$	Für $t = 0,5$
	$f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx^2$	$f_1(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2$	$f_{0,5}(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{4}x^2$
1. Nullstelle:	$N_1(0 0)$	$N_1(0 0)$	$N_1(0 0)$
2. Nullstelle:	$N_2(9t 0)$	$N_2(9 0)$	$N_2(4,5 0)$
Tiefpunkt:	$N_1(0 0)$	$N_1(0 0)$	$N_1(0 0)$
Hochpunkt:	$H(6t 6t^3)$	$H(6 6)$	$H(3 \frac{3}{4})$
Wendepunkt:	$W_t(3t 3t^3)$	$W(3 3)$	$W(\frac{3}{2} \frac{3}{8})$

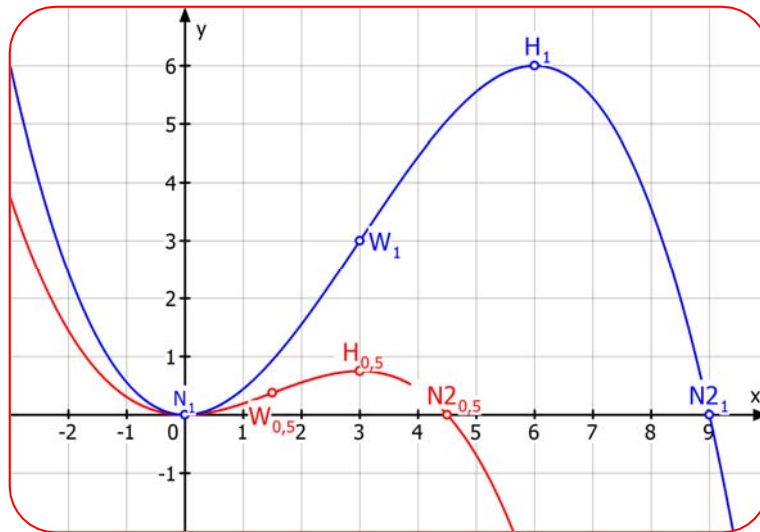
Fertige nun bitte eine Skizze für die Kurven K_1 und $K_{0,5}$ an.

Notiere zuerst für jede Kurve Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

$\Rightarrow$ 5

5 Hier die beiden Scharkurven:

$$K_1: y = f_1(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{und} \quad K_{0,5}: y = f_{0,5}(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$



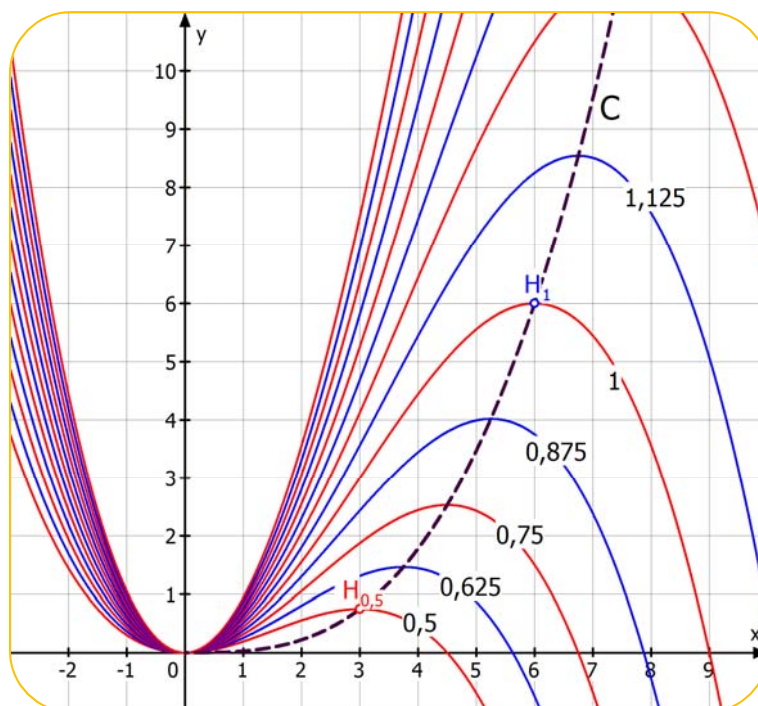
Man beobachtet, dass die Lage der Extrem- und Wendepunkte vom t-Wert der Funktion / Kurve abhängt. Ich zeige in der nächsten Abbildung die Kurven für $t \in \{0,5; 0,625; 0,75; 0,875; 1,0; 1,125\}$.

Die t-Nummern der Kurven stehen dabei.

Außerdem ist eine Kurve C (schwarz, gestrichelt) vorhanden, die durch alle Hochpunkte der 6 eingezeichneten Scharkurven geht. Man nennt sie die **Ortskurve der Hochpunkte**.

6 Kannst du beweisen, dass die Ortskurve C die Gleichung $y = \frac{1}{36}x^3$ hat?

Erinnerst du dich: Die Hochpunkte sind $H_t(6t | 6t^3)$. $\Rightarrow$ 7



7 Auf welcher Kurve C liegen alle Hochpunkte $H_t(6t | 6t^3)$ mit $t > 0$ der Kurvenschar?

Für Punkte, bei denen der Parameter t in beiden Koordinaten steht, nimm folgende Methode:

Es ist

$$x_H = 6t \quad \text{Also folgt} \quad t = \frac{1}{6}x_H$$

Ersetzt man t in

$$y_H = 6t^3, \text{ erhält man } y_H = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}x_H\right)^3$$

Oder besser so:

$$y_H = \frac{1}{6^2}x_H^3$$

Das bedeutet, dass H_t auf der Kurve C:

$$y = \frac{1}{36}x^3 \text{ liegt.}$$



Dazu gehört aber noch die für die Kurvenschar gemachte Einschränkung $t > 0$.

Zum Thema Ortskurven gibt es einen speziellen Text auf der Mathe-CD.

Er trägt die Nummer 42060.

Man merkt sich diese Methode zur Ortskurven-Bestimmung vielleicht so:

Hängen beide Koordinaten einer Punktschar vom Parameter ab, dann erhält man die Ortskurve, indem man den Parameter aus beiden Koordinaten eliminiert.

Die nächste Frage zur gegebenen Kurvenschar.

Welche Kurve K_t geht durch den Punkt $A(3 | 4)$?

Tipp: Wenn eine einzelne Kurve einer Schar gesucht ist, dann ist der Parameter t gesucht!

Bestimme ihn bitte!

⇒ **8**

8 Die gegebene **Funktionenschar** ist

$$f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx^2.$$

Die Graphen dieser Funktionen bilden die **Kurvenschar** K_t :

$$y = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx^2$$

Eine Kurve davon geht durch $A(3 | 4)$.

Also liefert die Punktprobe mit A eine wahre Aussage:

d. h. man setzt A ein ($x = 3$ und $y = 4$) und bestimmt t :

$$4 = -\frac{1}{18} \cdot 3^3 + \frac{1}{2}t \cdot 3^2$$

Umstellen: $4 = -\frac{27}{18} + \frac{1}{2}t \cdot 9$

$$4 = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2}t \Rightarrow \frac{9}{2}t = \frac{11}{2} \Rightarrow t = \frac{11}{9}$$

Nun eine schwierige Denkfrage:

Geht durch jeden Punkt der x-y-Ebene genau eine Kurve der Schar K_t ?

$\Rightarrow$ 9

9

Man wendet dasselbe Verfahren an, wie beim Punkt A.

Nur, dass jetzt ein beliebiger Punkt $P_1(x_1 | y_1)$ der Ebene für die Punktprobe genommen wird:

$$y_1 = -\frac{1}{18}x_1^3 + \frac{1}{2}tx_1^2$$

Wir suchen die durch P_1 gehende Kurve, also t:

Umstellen nach t:
$$y_1 + \frac{1}{18}x_1^3 = \frac{1}{2}tx_1^2$$

Seiten vertauschen:
$$\frac{1}{2}tx_1^2 = y_1 + \frac{1}{18}x_1^3 \quad | \cdot 2$$

$$tx_1^2 = 2y_1 + \frac{1}{9}x_1^3 \quad (*)$$

Nun muss man durch x_1^2 dividieren.

Da man nicht durch 0 dividieren kann, wähle ich eine **Fallunterscheidung**:

1. Fall: Es sei $x_1 \neq 0$, dann kann man durch x_1^2 dividieren:

$$t = \frac{2y_1}{x_1^2} + \frac{1}{9}x_1$$

Die rechte Seite ist eindeutig berechenbar, d. h. durch alle Punkte, die nicht auf der y-Achse liegen, geht genau eine Kurve K_t dieser Schar.

2. Fall: Es sei $x_1 = 0$, dann setzt man das in (*) ein:

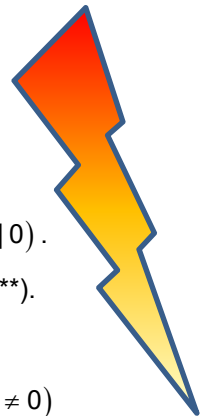
Es folgt
$$t \cdot 0 = 2y_1 + \frac{1}{9} \cdot 0$$

bzw.
$$0 = 2y_1 \quad (**)$$

Das ist eine wahre Aussage, wenn y_1 tatsächlich null ist, also für $P_1(0 | 0)$.

Und da in (**) kein t mehr steht, ist jedes t eine Lösung der Gleichung (**).

Interpretation: Durch den Ursprung $P_1(0 | 0)$ geht jede Scharkurve und durch alle anderen Punkte der y-Achse, also $P_1(0 | y_1 \neq 0)$ geht keine der Scharkurven, weil für sie (**) falsch ist.



10

Man kann beim Anblick der unteren Abbildung in Abschnitt 4 vermuten, dass sich zwei verschiedene Kurven der Schar immer nur im Ursprung schneiden.

Zum Beweis wählt man zwei verschiedene Kurven

$$K_1: y = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}t_1x^2 \quad \text{und} \quad K_2: y = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}t_2x^2 \quad \text{mit } t_1 \neq t_2$$

und berechnet deren gemeinsame Punkte.

Schaffst du das?

⇒ 11

11 Schnitt zweier verschiedener Scharkurven:

Es sei: $K_1: y = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}t_1x^2$

und $K_2: y = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}t_2x^2$ mit $t_1 \neq t_2$

Schnittgleichung:
$$-\cancel{\frac{1}{18}x^3} + \frac{1}{2}t_1x^2 = -\cancel{\frac{1}{18}x^3} + \frac{1}{2}t_2x^2 \quad | \cdot 2$$

$$t_1x^2 = t_2x^2$$

Jetzt nicht durch x^2 dividieren sondern:

Alles nach links: $t_1x^2 - t_2x^2 = 0$

x^2 ausklammern: $(t_1 - t_2)x^2 = 0$

Dieses Nullprodukt muss man nun interpretieren.

Da $t_1 \neq t_2$ vorausgesetzt war, kann die Klammer nicht Null werden.

Also folgt zwangsläufig: $x^2 = 0$. (***)

Das heißt: 1. $x = 0$ ist eine *doppelte* Lösung der Schnittgleichung.

Dort *berühren* sich also die Scharkurven.

2. Da in (***) kein t mehr steht, gilt diese Aussage für alle Scharkurven K_t :

Ergebnis: Alle Scharkurven berühren sich im Ursprung.

Andere Schnittpunkte zweier Scharkurven gibt es nicht.

12

Eine Zusatzaufgabe:

Die Gerade $g: y = -\frac{9}{2}x + \frac{81}{2}$ berührt eine der Scharkurven K_t an der Stelle $x = 9$.

Für welches t ist das möglich?

⇒ **13**

13 g: $y = -\frac{9}{2}x + \frac{81}{2}$ berührt K_t bei $x = 9$.

Da der Berührungspunkt B auch auf g liegt, kann man aus der Gleichung von g seine y-Koordinate berechnen:

$$y_B = -\frac{9}{2} \cdot 9 + \frac{81}{2} = 0$$

Also ist $B(9 | 0)$. Durch diesen Punkt geht (wie gezeigt) nur eine der Kurven K_t :

Punktprobe mit B liefert: $0 = -\frac{1}{18}9^3 + \frac{1}{2}t \cdot 9^2 \quad | : 9^2$

$$0 = -\frac{1}{18} \cdot 9 + \frac{1}{2}t \Rightarrow t = 1$$

Ergebnis: g berührt also K_1 in B.

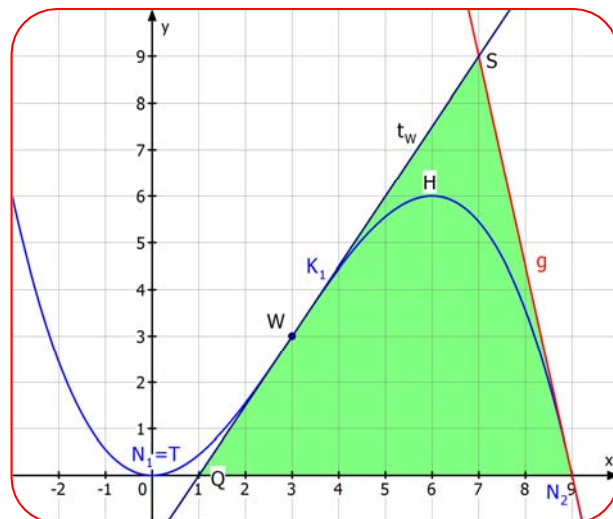
14 Wir bleiben bei K_1 .

Die Wendetangente, g und die x-Achse begrenzen ein Dreieck.

Welchen Inhalt hat dieses Dreieck?

Beginne damit, die Gleichung der Wendetangente t_w aufzustellen.

$\Rightarrow$ 15



15

Es geht um die Kurve K_1 bzw. die Funktion $f_1(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

Wir kennen bereits den Wendepunkt: $W_t(3t | 3t^3)$

Für $t = 1$ ist das $W_1(3 | 3)$.

Die Tangentensteigung berechnet man mit $f_1'(x) = -\frac{1}{6}x^2 + x$:

$$m_{tW} = f'(3) = -\frac{9}{6} + 3 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Zur Aufstellung einer Geradengleichung verwendet man die **Punkt-Steigungs-Form**:

$$y - y_W = m_{tW} \cdot (x - x_W), \text{ also: } y - 3 = \frac{3}{2}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

Nun berechnen wir die Eckpunkte des Dreiecks:

Schnittpunkt der Wendetangente mit der x-Achse: $0 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow x_Q = 1 \Rightarrow Q(1 | 0)$

Schnittpunkt der Wendetangente mit g: $\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}x + \frac{81}{2} \Leftrightarrow 6x_S = 42 \Leftrightarrow x_S = 7$
mit $y_S = \frac{3}{2} \cdot 7 - \frac{3}{2} = 9 \Rightarrow S(7 | 9)$.

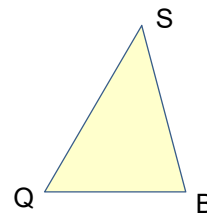
Der Schnittpunkt von g mit der x-Achse war $B(9 | 0)$.

Das Dreieck QBS hat also

die Grundseite $\overline{QB} = 9 - 1 = 8 \text{ (LE)}$

die Höhe $h = y_S = 9 \text{ (LE)}$

und den Inhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36 \text{ (FE)}$



Damit endet unsere heutige Nachhilfestunde!

CIÀO